Grado M+I
Curso 2015-2016

Cálculo I

Matemática Aplicada
ETSIINF-UPM

Soluciones del Segundo Parcial

22 de diciembre de 2015

APELLIDOS:	Nota: /10
NOMBRE:	

Parte 1. Teoría (2 puntos).

1. Enuncia el teorema de Bolzano.

2. Enuncia y prueba el Teorema de los valores intermedios de Daboux.

3. Dada la función $f(x) = x^3 + 3x$, prueba que existe un único valor c tal que $f(c) = 3$. Utiliza el teorema de Bolzano para aproximar ese valor con un error menor de $0,3$.

   Solución: Puesto que f es continua en $[0, 1]$ y $f(0) = 0$ y $f(1) = 4$ por el teorema de los valores intermedios existe $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 6$. Para justificar la unicidad, puesto que $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, la función f es estrictamente creciente y por tanto existe un único $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = 6$.

   Para obtener una aproximación de la solución de $x^3 + 3x = 6$ o lo que es lo mismo $x^3+3x-6 = 0$, aplicamos el método de la bisección a la función continua $g(x) = x^3+3x-6$ en el intervalo $[0, 1]$. Puesto que $g(0)g(1) < 0$ dividimos el intervalo $[0, 1]$ y consideramos el punto $x = \dfrac{1}{2}$. Puesto que $g(\frac{1}{2}) < 0$, dividimos el intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$ y puesto que $f(\frac{3}{4}) < 0$. Una aproximación de c con error menor que $0,3$ es $3/4$.

Cuestiones. (2 puntos) Nota: /2

1. **(1 punto)** Sea $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x-5}$. Indica si es acotada en cada uno de los intervalos siguientes, razonando la respuesta.

   i) f es acotada en $[2,6]$. ☐ Si ☒ No

   No está acotada, puesto que $\displaystyle\lim_{x\to 5^+} \frac{\ln(x+1)}{x-5} = \infty$.

   ii) f es acotada en $[6,100]$. ☒ Si ☐ No

   Es cierto, puesto que f es continua en $[6,100]$ y por el teorema de acotación f está acotada en dicho intervalo.

   iii) f es acotada en $[6,\infty)$. ☒ Si ☐ No

   Como f es continua en $[6,\infty)$ y $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{x-5} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+1} = 0$, se tiene que f está acotada en $[6,\infty)$.

   iv) f es acotada en $(0,5)$. ☐ Si ☒ No

   No está acotada, puesto que $\displaystyle\lim_{x\to 5^-} \frac{\ln(x+1)}{x-5} = -\infty$.

2. **(0.5 puntos)** Señala si las siguientes afirmaciones son correctas:

   i) $f(x) = x^{1/3}$ tiene tangente vertical en $x = 0$. ☒ Si ☐ No

   ii) $f(x) = x^{5/3}$ es dos veces derivable en 0. ☐ Si ☒ No

   iii) $f(x) = x^{4/5}$ tiene tangente vertical en 0. ☐ Si ☒ No

   iv) $f(x) = |x-5|$ es derivable en 5. ☐ Si ☒ No

   v) $f(x) = |x-5|^3$ no es derivable en 5. ☐ Si ☒ No

   Es decir, $f(x) = |x-5|^3$ sí es derivable.

3. **(0.5 puntos)** Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones derivables en $\mathbb{R}$ tales que $g(0) = 3$ y $f(3) = 9$. Entonces la función $F(x) = \displaystyle\int_0^{g(x)} f(t)\,dt$ es derivable en $x = 0$ y la recta tangente a la gráfica de F en $x = 0$ es $y = 9x$

   ☐ Si ☒ No

   Por el teorema fundamental del cálculo, F es derivable y se tiene

   $$F'(x) = f(g(x))g'(x) \text{ y, para } x = 0 \text{ se tiene } F'(0) = f(g(0))g'(0) = 9g'(0),$$

   Por tanto, depende del valor de $g'(0)$. Si por ejemplo $g'(0) = 0$ se tiene $F'(0) = g'(0)f(g(0)) = 0$ y la recta tangente a la gráfica de F en $x = 0$, en este caso, será $y = 0$.

Parte 2. Problemas (6 puntos)

Ejercicio 1. (1 punto) Calcula los siguientes límites:

Nota: /1

1. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+1}}{e^x}=1$ utilizando la regla de L'Hopital puesto que se trata de una indeterminación del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

2. $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x}{x^2+3}\right)^x=$ Como es una indeterminación del tipo 1^{∞} tenemos que:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x}{x^2+3}\right)^x=\lim_{x\to\infty}e^{\left(x\left(\frac{x^2-2x}{x^2+3}-1\right)\right)}=e^{\left(\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{x^2-2x}{x^2+3}-1\right)\right)}=e^{-2}$$

Ejercicio 2. (1 punto) Estudia la continuidad y las asíntotas de la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(x+1)}{x(x-5)}, & \text{si } x>0 \text{ y } x\neq 5\\ x\operatorname{sen}(\dfrac{1}{x}), & \text{si } x<0\\ 0, & \text{si } x=0, \text{ o } x=5\end{cases}$$

La función f es continua si $x\neq 0$ y $x\neq 5$. Estudiamos la continuidad en estos puntos:
• En $x=0$ tenemos una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, por lo que utilizando L'Hôpital, se tiene

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)}{x(x-5)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{(x+1)(2x-5)}=\frac{-1}{5}$$

Por otra parte, como $x\to 0$ y $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ es acotada se tiene que

$$\lim_{x\to 0^-}x\operatorname{sen}(\frac{1}{x})=0.$$

Puesto que $f(0)=0$ **la función no es continua en** 0 **y tiene una discontinuidad en** $x=0$ **de salto.**
• En $x=5$ tenemos que:

$$\lim_{x\to 5^+}\frac{\ln(x+1)}{x(x-5)}=+\infty \qquad \lim_{x\to 5^-}\frac{\ln(x+1)}{x(x-5)}=-\infty$$

por lo tanto$f$ **no es continua en** $x=5$**.**
La función tiene una asíntota vertical en $x=5$**.**
• Para estudiar las asíntotas horizontales, estudiamos el comprtamiento en el infinito:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+1)}{x(x-5)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(x+1)(2x-5)}=0,$$

por tanto, **la función tiene una asíntota horizontal** $y=0$**.**

$$\lim_{x\to-\infty}x\operatorname{sen}(\frac{1}{x})=\lim_{x\to-\infty}\frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{1/x}=1,$$

por tanto, **la función tiene una asíntota horizontal** $y=1$**.**

Ejercicio 3. (1 punto) Calcula el polinomio de Taylor de orden dos en el punto $x = 0$ de la función $f(x) = \ln(1 + \frac{x}{10})$. Utiliza dicho polinomio para dar una aproximación del valor de $\ln(1.2)$ y acota el error.

El polinomio de Taylor de f en $x = 0$ de grado dos, es:

$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = \frac{1}{10}x + \frac{-1}{200}x^2$$

Por lo tanto, utilizando el teorema de Taylor de f entre $x = 0$ y $x = 2$,

$$\ln(1,2) = f(2) \sim P(2) = \frac{2}{10} + \frac{-4}{200} = 0,18$$

Para la estimación del error, existe $c \in (0, 2)$ tal que:

$$ERROR = |\frac{1}{3!}f^{(3)}(c)2^3| = \frac{1}{3!}\frac{2}{(10+c)^3}8 \leq \frac{8}{3000} < 0,0026.$$

Ejercicio 4. (2 puntos) Sea $f(x) = |x^2 - \frac{1}{x}|$ si $x \neq 0$.

1. Calcula los máximos y mínimos absolutos de f en $[-\frac{1}{2}, 4]$.

   La función no es continua en $x = 0$, puesto que no está definida en $x = 0$ y $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$. Por tanto el máximo absoluto no se alcanza. Por otra parte, puesto que $f(x) \geq 0$ y $f(1) = 0$, el mínimo absoluto se alcanza en $x = 1$.

2. Calcula los extremos relativos de f y esboza la gráfica de f.

   Teniendo en cuenta el signo de la expresión $x^2 - \frac{1}{x} = \frac{x^3 - 1}{x}$ tenemos que la función está definida como:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \frac{1}{x}, & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x} - x^2, & \text{si } \quad 0 < x \leq 1 \\ x^2 - \frac{1}{x}, & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad f'(x) = \begin{cases} 2x + \frac{1}{x^2}, & \text{si } x < 0 \\ \frac{-1}{x^2} - 2x, & \text{si } \quad 0 < x < 1 \\ 2x + \frac{1}{x^2}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

   En $x = 0$ tiene una asíntota vertical. Calulamos la función derivada y tenemos que en $x = 1$ no es derivable puesto que es continua pero $\lim_{x\to 1^-} f'(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f'(x)$. Por otra parte, como $x = 1$ es un mínimo absoluto de f en $\mathbb{R}$ entonces $x = 1$ **es un mínimo relativo**.

   Para calcular $f'(x) = 0$, como

$$2x + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^3 = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2^{1/3}}$$

   el punto $x = \frac{-1}{2^{1/3}}$ es un posible extremo relativo. De hecho es un mínimo relativo puesto que estudiando el crecimiento y decrecimiento de la función tenemos que:

   2.1. $f'(x) < 0$ en $(-\infty, \frac{-1}{2^{1/3}})$, f es decreciente en $(-\infty, \frac{-1}{2^{1/3}})$.

   2.2. $f'(x) > 0$ en $(\frac{-1}{2^{1/3}}, 0)$ entonces f es creciente en dicho intervalo.

   2.3. $f'(x) < 0$ en $(0, 1)$ entonces f es decreciente en dicho intervalo.

   2.4. $f'(x) > 0$ en $(1, \infty)$ entonces f es creciente en dicho intervalo.

Ejercicio 5. (1 punto) Calcula las siguientes integrales:

1. $\int \frac{3}{x^2 + 4x + 5}\, dx = 3arctan(x + 2) + C$

2. $\int x^2 e^{5x}\, dx$ Utilizando el método de integración por partes $u = x^2$ y $dv = e^{5x}$ tenemos que:

$$\int x^2 e^{5x}\, dx = \frac{e^{5x}}{5} x^2 - \frac{2}{5} \int x e^{5x}\, dx.$$

   Usando de nuevo el método de integración por partes con $u = x$ y $dv = dx$ se tiene que:

$$\frac{e^{5x}}{5}(x^2 - \frac{2x}{5} + \frac{1}{25}) + C$$